

De anticipatie van creatieve en elegante wiskunde



Norbert E. Ligterink
Universiteit Twente, Enschede
Instituut ELAN
commissie: Pranab Mandal, Carel Vaneker en
Steffen Posthuma
10 juli 2007

Dit is het verslag ter afronding van de opleiding: *Master of Science Education* (lerarenopleiding eerstegraads wiskunde) aan het instituut ELAN van de Universiteit Twente. In de afgelopen anderhalf jaar ben ik betrokken geweest bij de ontwikkeling van lesmateriaal voor Wiskunde D: Wiskunde in Wetenschap. Dit verslag is een overdenking en omkadering naar aanleiding daarvan.

Na elk smakelijk diner bij mijn schoonmoeder en haar vriendin komt het gesprek op wiskunde en rekenen op school. Mijn schoonmoeder begeleidt leerkrachten op basisscholen met leerlingen met rekenachterstanden, en haar vriendin verzorgt de communicatie en samenhang tussen de stagebegeleiders van PABO-studenten en de leergang op de PABO. Rekenen is geen wiskunde, zeggen ze. Ik vind van wel. Daarover later meer.

Iedereen heeft wel wat te zeggen over onderwijs. De vaak goedbedoelde opmerkingen en zorgen sturen de discussies alle kanten op. In het huidige tijdperk Van Vollenhove erkennen mensen alleen maar problemen van het formaat ramp, en oplossingen in termen van het aanwijzen en vervangen van de verantwoordelijke schuldigen: conceptueel, materieel, of personeel. Die urgentie verstoort, jammer genoeg, de gemodereerde structurele verbeteringen. Zo ook in het onderwijs. Wiskunde-D is een onderdeel van de recente vernieuwingsdrang. Maar het is tegelijkertijd ook een mogelijkheid om wat oude idealen terug te brengen in het wiskundeonderwijs op de middelbare school, aangepast aan de huidige normen.

Het leerlingmodel staat centraal in de huidige normen. Geen docent zal nog over lesstof praten zonder daarbij niet vanaf het begin rekening te houden met de gemiddelde, liefst zwakke, leerling. Het rare is dat die leerling niet bestaat, behalve dan in het hoofd van de docent. Het is een denkraam, of denkanker, die elke discussie over wiskundeonderwijs direct naar de uitvoeringsvorm trekt. Het leerlingmodel is een afbakening van de status quo in de klas. Idealen zijn niet meer van deze tijd. Terwijl wiskunde niet te doceren is zonder idealen. We kunnen niet in het hoofd van de leerling kijken, in plaats daarvan geven de idealen de abstracte concepten die we hopen over te brengen met de lesstof. De vaardigheden zijn niet meer dan een armzalige reflectie van die concepten. Zoals een aap of hond trainen, dat is het aanleren van vaardigheden als leerdoel.

Neem het getal nul. Het heeft eeuwen geduurd voordat niets iets werd, en dat niets heet nul. Vaardigheden zijn “nul maal iets is nul”, “nul plus iets is hetzelfde iets”, enzovoort. Maar nul als concept is veel meer. Nul is een ideaal. Het is de wiskundige versie van de taalkundige vraag: “gebruik het woord

nul op de juiste manier in een zin”. Nul als een paraat concept: “maar, dat is altijd nul” en “dat mag geen nul zijn, toch?”. En wat te denken van leerlingen die na een fikse rekenpartij uitkomen bij “ $0=0$ ”, en zich afvragen wat ze daarmee bereikt hebben. Misschien onbenullig, maar een nul dat is pas wat.

Men heeft het tegenwoordig vaak over de wiskundige gereedschapskist van de leerlingen, om vervolgens aan te geven dat die kist te leeg is. De analogie met gereedschap is dubbelzinnig zodat het in verschillende gezichtspunten past. Ten eerste kan een vaardigheid als een stuk gereedschap gezien worden, en zijn mensen die zich richten op vaardigheden tevreden met de analogie. Maar gereedschap duidt ook de verscheidenheid aan toepassingen in het maken van constructies met een stuk gereedschap. Het verschil zit hem erin of een hamer alleen maar gebruikt wordt om spijkers in een groot stuk hout te slaan, of om er iets mee te bouwen. In taal verwachten we van leerlingen dat ze woorden in andere contexten begrijpen en gebruiken, waarom kan dat niet in de wiskunde?

Het sleutelwoord is creativiteit. Creativiteit is een onberekenbare factor in de schoolklas. Ten eerste, rekent de docent met zijn leerlingmodel niet op de creativiteit van de zwakke leerling. Het is niet een vaardigheid die dom te trainen is. Ten tweede, impliceert creativiteit het afwijken van het uitgestippelde leerpad. Zowel de docent als de leerling weten niet waar de lesstof ze brengt, dat is een onzekerheid die ze beiden gebruikelijk uitbannen.

Creativiteit is een ideaal dat we allemaal begrijpen. Maar het is ons te ongrijpbaar. Wat is nu eigenlijk creativiteit? Verbeelding en vaardigheid om iets nieuws te maken. Eigenlijk is het de enige aanwijzing dat leerlingen de lesstof echt eigen hebben gemaakt. Net als een leerling die nieuwe woorden natuurlijk gebruikt. In theorieën over leren spreekt men van een procept, een bruikbaar concept, een verbinding of context, dat zich heeft gevormd in het hoofd van de leerling.

In Wiskunde-D wordt een poging gedaan om de creativiteit een centrale plaats te geven. Aan de leerlingen wordt gevraagd om modellen te bouwen met wiskundige gereedschappen. De wiskunde is niet alleen het gereedschap, maar ook de taal van het model. De hoop is dat de leerling, gedreven door de

problemen waarmee hij gesteld wordt, op een creatieve wijze aan de slag gaat met de wiskunde die hij voor handen heeft, om zo, uit noodzaak van het probleem, zich uiteindelijk ook nieuwe wiskunde eigen maakt.

1 Het concept en het probleem

De opgaven die men de leerlingen voorlegt zijn de kern van het onderwijs. Ze bepalen de relevante lesstof, het niveau, en de mate van zelfstandigheid waarmee de leerlingen werken. De noodzaak tot het eigen maken van de lesstof wordt voor leerlingen gedicteerd door de opgaven. Leerlingen slaan in de moderne lesboeken de tekst vaak over en richten zich direct tot de sommen. De sommen in moderne boeken geven nauwelijks aanleiding om de stof te bestuderen, de docent heeft ook niet meer dat een motiverende rol (“lees de vraag nog eens goed”). In deze trend verwordt wiskundeonderwijs tot het aanleren van vaardigheden. Terwijl de vaardigheden vroeger nooit tot de leerdoelen behoorden. [Van Hiele, 1973]

De formulering, de inhoud, en het verlangde antwoord, van een opgave zijn van het grootste belang voor het moderne onderwijs. In de wiskunde zijn er een aantal simpele vragen die eenvoudig gesteld kunnen worden, maar onmogelijk beantwoord. Dergelijke vragen gaven aanleiding tot enorme discussies en ontwikkelingen in de wiskunde: [Aigner and Ziegler, 2003]

- De stelling van Fermat: $n > 2$

$$x^n + y^n = z^n$$

Zijn er geheeltallige x, y, z waarvoor deze gelijkheid geldt?

- Het vierkleuren probleem: kun je een willekeurige landkaart kleuren met vier kleuren?
- Is de omtrek van een cirkel te schrijven als een breuk?
- Wanneer is iets bewijsbaar (en niet triviaal)?
- Moet je van deurtje wisselen in de Willem Ruis show?

- Wat is de wortel uit een negatief getal?
- Waarom je een bal niet kan platdrukken en een buis wel?

Dergelijke vragen kunnen voor de zelfstandige en creatieve leerlingen aanleidingen zijn om zelf met wiskunde aan de slag te gaan. In dat opzicht passen ze goed binnen het moderne denken over onderwijs, waarbij de zelfwerkzaamheid van de leerling een grote rol speelt.

Aan de andere kant zullen dergelijke moeilijke vragen nooit gesteld worden, vanwege, de eerder beschreven, twee problemen: Ten eerste, is het leerdoel niet goed omschreven. Creatieve leerlingen kunnen overal uitkomen, zwakke leerlingen nergens, zonder dat beide iets te verwijten valt. Ten tweede, kan een zwakke, weinig creatieve, of opstandige leerling niet uit de voeten met een dergelijke open vraag. Het leerling-model is de toetssteen voor het probleem.

De goede manier om zulke vragen in het onderwijs in te passen is het onderzoek. De leerling wordt aanzet tot het onderzoeken van de vraag, als de basis voor eventuele creatieve inzichten. Het onderzoeken van de vraag is een vorm van het opnemen, gebruiken, en communiceren van de concepten.

Het onderzoek van de leerlingen in banen leiden is de centrale vraag geweest bij het opstellen van het Wiskunde-D lesprogramma: Wiskunde in Wetenschap. De belangrijkste conclusie daarvoor is het verschil in niveau en opzet van het leerlingmateriaal en de docenthandleiding. De docenthandleiding geeft iets van de rijke context aan, dat de achtergrond vormt voor de kernachtige problemen die de leerlingen worden voorgelegd. De docent dient de mogelijke ontwikkeling van de leerlingen te kunnen anticiperen. Steeds meer van de lesstof is van het leerlingmateriaal naar de docenthandleiding verhuist. De problemen zullen de leerlingen in eerste instantie verraderlijk eenvoudig voorkomen. Hun eigen onderzoek leidt ertoe dat ze de omvang van het probleem gaan overzien.

In de cognitieve psychologie wordt er ook gewerkt met relatief eenvoudig gestelde vragen, om het gecompliceerde oplossingsproces, de aanpak (approach), te volgen. [VanLehn, 1989] We herkennen daar in verschillende aspecten:

- De creativiteit om een aanpak te proberen.
- De volharding in een aanpak.
- Het correctie mechanisme, het afwijzen van een aanpak, het tegenvoorbeeld.
- De laterale aanpak, de intuïtie, aanpakken uit het ongerijmde.
- Het vermogen tot verbalisering van een aanpak.
- De mate van consistentie, definities en logica.

De formalisering van het denkproces, de aanpak, langs deze lijnen is niets anders dan wiskunde bedrijven. Niet alleen de problemen, maar ook het proces, de werkvorm zoals het klasgesprek, is wiskunde.

Een ideaal van de wiskunde is verborgen in de systematiek van de aanpak. Het terugkoppelen, het generaliseren, de abstractie, en de transfer zijn introspectieve aspecten van de wiskunde waar leerling vaak alleen door de Socratesiaanse docent toe aanzet kan worden. Het levert geen direct voordeel. Het is niet beoordeelbaar. De leerling zal het nut van dergelijke overdenkingen zelf in moeten zien.

2 De verloren creativiteit

De voornaamste taak van de docent is het herkennen, benoemen en sturen van de creativiteit van de leerling, niet het stimuleren ervan. Het slimme rekenen, wat tegenwoordig op de lagere school tot een multitude aan methoden en vaardigheden heeft geleid waar niet alleen de leerling, maar ook de PABO student in verloren raakt, is de consequentie geweest van een dogmatische houding ten aanzien van het denkonderwijs, dat streeft naar inzicht en begrip. De creativiteit verwordt tot een vaardigheid, als het de leerling aangeboden wordt voordat deze er goed en wel aan toe is.

De docent dient derhalve boven de stof te staan, en verschillende contexten en methoden kennen, zodat de richtingen waarin de leerling de antwoorden zoekt gestimuleerd en bijgestuurd kunnen worden. De anticipatie is de kernvaardigheid van de docent.

De verschillende contexten die een docent kan hanteren om zoiets als algebra (rekenvaardigheden) te doceren zijn zeer gevarieerd:

- Historische context, de ontstaansgeschiedenis van concepten, de problemen die aanleiding gaven tot de wiskunde. De mogelijkheden die nieuwe wiskunde gaf. Het levensverhaal van wiskundige protagonisten.
- Oude wiskundige technieken, Egyptische en Romeinse cijfers.
- Knippen, plakken, en stappen. De getallenlijn, vierkantjes en blokjes, papier.
- De werking van een rekenmachine of computer, machinetaal. Het algoritme, het proces.
- Geometrische context, het getal als eigenschap. De relatie tussen eigenschappen van geometrische objecten.
- Geld, munten, rente, banken.
- Dagelijkse besommingen, snelheid en plaats van auto's, tijdsplanning, verdelen van dingen, indelen van groepen.
- De zoektocht van een fictief persoon. Het sprookje.

Het geeft geen pas om van de ene op de andere context over te springen, maar het is wel een mogelijkheid om door associatie meer structuur in de lesstof aan te brengen. De context kan het thema van een les zijn, dat een paar weken later terugkeert, en zo nieuwe lesstof aan de eerdere lesstof verbindt.

3 Wiskundige didactiek versus didactische wiskunde

Over bijna alle wetenschappelijke onderwerpen bestaan er zoveel meningen als wiskundeleraars. Het aanbieden van de lesstof kan op veel verschillende manieren. Nu zijn er praktische verschillen in de onderwijsvormen, zoals klassikale les, opdrachten, verscheidene vormen van groepsgewijs onderwijs. Maar

de diversiteit van de concrete uitwerking van het wiskundige concept, in de uitleg, het voorbeeld, het beginpunt, de motivatie, de logica, de lijn, de representatie, etc., is nog veel groter. Eigenlijk is dat een deel van de schoonheid van de wiskunde, dat verschillende mensen op verschillende manieren tegen hetzelfde concept aan kunnen kijken, en het toch met elkaar eens kunnen zijn. Waar ze over van mening verschillen is alleen de franje. Maar die franje heeft wel een grote neerslag in de didactische vorm.

Sommige docenten houden dogmatisch vast aan hun lijn. Sommige docenten denken dat de manier waarop het kwartje bij hen gevallen is, zo het ook bij alle anderen zou moeten vallen. Sommige docenten identificeren vaardigheid met concept. Wiskundige vakdidactiek heeft een duidelijke rol de docent te bevrijden van een nauwe visie op de didactische lijn. Wiskundeleraars die van mening verschillen doen dat vaak op grond van secundaire argumenten, waarin het leerlingmodel vaak een grote rol speelt.

Het gaat erom om aan te sluiten bij de leerling, liefst bij elke leerling. De leerling moet in staat zijn het probleem te bevatten. Het moet simpel gesteld kunnen worden en aansluiten bij de ervaring van de leerling. Maar nog veel belangrijker is dat de docent een arsenaal aan mogelijkheden heeft zodat hij de richting waarin de leerling de oplossing zoekt zowel begrijpt, als ook daarin handreikingen kan doen.

Elegantie en schoonheid zou een centrale rol moeten spelen in het opstellen van de vragen. Elegantie is een vorm van eenvoud die pas bij nadere beschouwing een complexe wereld openbaart. Elegantie is een basisvorm waaruit een eenvoudige probleemstelling kan volgen, die leerlingen zich gemakkelijk eigen maken, om daarna, in het onderzoek tot meer complexe beschrijvingen te geraken.

Aan de andere kant is elegantie ook de reductie van een complex probleem tot zijn essentie. Wiskunde werkt met geïdealiseerde concepten. In het eigenmaken van die concepten speelt het scheiden van hoofdzaken, de essentie, en bijzaken, de contexten, een grote rol. De vraag van de docent aan de leerlingen, of iets ook eenvoudiger, eleganter, gesteld kan worden heeft daarbij een belangrijke functie.

Een strijd tussen natuurkundigen en wiskundigen gaat over constanten. Wiskundigen vereenvoudigen

vergelijkingen vaak tot de eenvoudigste vorm, terwijl natuurkundigen allerlei constanten in de vergelijkingen laten staan. Neem bijvoorbeeld de twee verschillende vormen van de golfvergelijking. De natuurkundige schrijft:

$$\rho \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t^2} - \kappa \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial x^2} = 0$$

Terwijl de wiskundige de dichtheid ρ en de stijfheid κ maar onhandig vindt, en heeft begrepen dat de vergelijking in essentie niet verandert voor $\rho = \kappa = 1$:

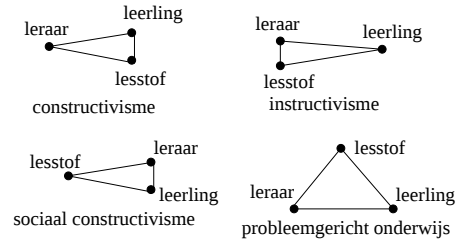
$$\frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial x^2} = 0$$

De tweede, wiskundige vorm valt nog verder te vereenvoudigen, met $\eta = t + x$ en $\xi = t - x$:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

De vereenvoudiging van de vergelijkingen, tot de essentie, speelt niet alleen een belangrijke rol in een goede formulering van het probleem voor leerlingen, maar ook in het oplossen zelf. In dit geval geeft de laatste vorm van de golfvergelijking al aan dat de oplossing y een de som is van twee willekeurige functies $g(\xi)$ en $f(\eta)$. De val bestaat om een probleem in de meest generieke en algemene vorm te geven, om zo leerlingen allerlei aanknopingspunten te geven voor het oplossen. Een deel van de taak voorgelegd aan leerlingen met de sommen van de moderne schoolboeken, is het distilleren van de daadwerkelijke, wiskundige opdracht, uit de context. De taak is op zich een goede, maar het heeft vaak weinig met wiskunde te maken. Het probleem is op een triviale manier complex, in plaats van, dat het probleem daadwerkelijk complex is.

Novak benadrukt het belang van spaarzaamheid, die in elegantie doorklinkt, ook. [Novak, 1977] Hij legt het verband met Ockham's scheermes, en Hamilton's "law of parsimony". Zijn visie op onderwijs is filosofisch, in de zin dat het geven en ontvangen van onderwijs een puur en vol menselijke aangelegenheid is, waar observationele studies slechts een fractie van herkennen, of erkennen. Alleen het gedestilleerde kernconcept is de moeite waard te communiceren,



Figuur 1: De verschillende onderwijsvormen als een driehoek leraar-leerling-lesstof. Een gelijkzijdige driehoek biedt zowel de leerling als de leraar meer mogelijkheden mits de lesstof rijk en gevarieerd genoeg is.

omdat het de vrucht is van het cognitieve proces, de waarachtige communicatie.

Een vergelijkbare mening vinden we bij Gage, die concludeert dat de psychologische scholen het proces van onderwijzen trivialisieren. [Gage, 1964] Er is een trend van leertheorieën om boven de relatie tussen docent, leerling, en lesstof te willen staan, terwijl de rijkdom van die driehoek alle mechanische visies overstijgt. Zie ook Figuur 1. Een culturele, religieuze of filosofische visie die zich toelegt op de basisvoorwaarden voor onderwijs, daarbij de slagvaardigheid en creativiteit versterkend, is aan te bevelen boven een, helaas al te courante, klassificatiedrift, die alleen een beschrijving levert zonder handvest. [Russell, 1926]

4 Motivatie

Er zijn weinig landen in de wereld waar democratie zo ver is doorgevoerd als in Nederland, niet zozeer als staatsvorm, maar in de zin van sociale gelijkheid en ieders inbreng respecterend. In de globalisering en management staat deze democratie onder druk, en de analogie met familie-relaties (bv. de "taak" van de ouder) wordt gebruikt om het fundament onder de sociale democratie weg te zagen.

Maar in het onderwijs is de democratie nog sterk aanwezig. De docent dient de leerling te overtuigen van het nut en belang van de lesstof. De motivatie is belangrijk. De neiging bestaat om "ah"-en-"wow"

factoren aan de lesstof toe te kennen. De stof dient blits, kleurrijk, en cool te zijn. Dergelijke criteria staan op gespannen voet met de zelfwerkzaamheid van de leerling. In een “ah”-en-“wow” les is de leerling vooral toeschouwer. De zelfwerkzaamheid, zoals eerder besproken, zorgt ervoor dat de leerling actief met de lesstof omgaat, en het zo eigen wordt.

Meer nog dan volwassenen hebben kinderen een natuurlijke interesse in de wereld om hen heen. Veel ervaringen zijn nieuw. De nieuwsgierigheid van kinderen, het eeuwige “waarom?”, vermoeit de volwassenen, die de wereld zijn gaan accepteren als een voldongen feit. Babyvoeding is zoutloos, dat is voor babies geen probleem. Maar het gebeurt wel eens dat ouders zout aan babyvoeding toevoegen, voor de baby, met alle problemen van dien. Zo is het ook met onderwijs. De interesses van leerlingen moet de docent herkennen, en de docent moet voldoende kennis in huis hebben om daar op in te springen, ofwel anticiperen.

Piaget concludeerde reeds dat betrokkenheid (affectie) niet los te zien is van pedagogiek. [Piaget, 1981] Een mens heeft een natuurlijke neiging om zich in kennis te stellen van zijn omgeving. Piaget geeft educatie een plaats in het natuurlijke proces van de ontwikkeling van een kind. Onderwijs is het op de juiste manier aanbieden van lesstof voor de deze cognitieve ontwikkeling.

De problemen die men leerlingen voorlegt moeten passen binnen het proces van de leerling om zijn omgeving te bevatten. (cognitie) Hiele stelt de niveaus vast waarop een leerling zich kan bevinden. [Van Hiele, 1973] Het heeft geen zin om problemen aan te bieden die boven het niveau van de leerling liggen. Het onderzoek van een probleem, daarentegen, stelt geen niveau. De onderzoeksmethoden die de leerling natuurlijk voorkomen bepalen het niveau.

Als ik naar mijn eigen ontwikkeling in programmeren kijk herken ik daarin momenten waarop bepaald werk saai werd. Dat is het moment om stil te staan bij de handeling, en de taak te doorzien, te bevatten, en te automatiseren. De complexiteit van de programmeeropdrachten groeide met de complexiteit van de problemen waarmee ik mij gesteld zag. Het gebruiken van recursieve algoritmes, en het gebruiken van termherschrijfsystemen zijn daarin twee belangrijke

mijlpalen geweest. Veel leerlingen zie ik op een mechanische wijze omgaan met lesstof. Hun handelen wordt nauwelijks geëvalueerd omdat er geen stimulans is om het te evalueren. Het zijn beperkte opdrachten met een beperkte draagwijdte: de volgende paragraaf vereist minimale verwerking van de voorafgaande stof.

Rekenen is het schoolvoorbeeld van een concept dat mee kan groeien met de leerling. In plaats daarvan wordt het gezien als een afgebakende basisvaardigheid, die gedrilt moet worden. Zo wordt het saai. Zo wordt het iets dat je op de rekenmachine doet, zonder er bij na te denken. Rekenen is algebra, mits je de problemen mee laat groeien met het niveau van de leerling. Op de lagere school wordt de ontwikkeling nog wel erkend, maar op de middelbare school stopt het. Er komt een strikje omheen, en men zegt: “dit is rekenen, een basisvaardigheid”.

5 Rekenen is wiskunde

Ik heb voor mijzelf een programmaatje geschreven dat een staartdeling uitvoert. Natuurlijk kan delen op elke rekenmachine, maar mij ging het niet om het antwoord, maar om het proces, het algoritme. De staartdeling wordt bekeken als een herkenningsproces. Ik kwam tot de ontdekking dat staartdelen alleen goed werkt als je eerst een tabelletje maakt van de deler vermenigvuldigd met de getallen 2 tot 9. De staartdeling:

```
123/456789 \ . . . .
vraagt om het rijtje:  1*123 = 123, 2*123
= 268, 3*123 = 369, 4*123 = 492, 5*123 =
615, 6*123 = 738, 7*123 = 861, 8*123 = 984,
9*123 = 1107, zodat de restterm onmiddellijk
herkend wordt als zijnde meer dan  $i * 123$  en minder
dan  $(i + 1) * 123$ .
```

De output van het programma was:

```
Hoeveel is 456789 / 123?
4 niet deelbaar door 123,
      nog maar een cijfer van het getal 56789
----
45 niet deelbaar door 123,
      nog maar een cijfer van het getal 6789
----
```

```

456 deelbaar, door 3 keer de deler 123
voeg een 3 toe achteraan het resultaat: 3
er blijft dan over  $456 - 3 \cdot 123 = 87$ 
een nieuw cijfer van het getal 789
----
877 deelbaar, door 7 keer de deler 123
voeg een 7 toe achteraan het resultaat: 37
er blijft dan over  $877 - 7 \cdot 123 = 16$ 
een nieuw cijfer van het getal 89
----
168 deelbaar, door 1 keer de deler 123
voeg een 1 toe achteraan het resultaat: 371
er blijft dan over  $168 - 1 \cdot 123 = 45$ 
een nieuw cijfer van het getal 9
----
459 deelbaar, door 3 keer de deler 123
voeg een 3 toe achteraan het resultaat: 3713
er blijft dan over  $459 - 3 \cdot 123 = 90$ 
een nieuw cijfer van het getal
----
de getallen zijn op
10 cijfers achter de komma? snel even dan:
900 -  $7 \cdot 123 = 39$ , resultaat: 3713.7
390 -  $3 \cdot 123 = 21$ , resultaat: 3713.73
210 -  $1 \cdot 123 = 87$ , resultaat: 3713.731
870 -  $7 \cdot 123 = 9$ , resultaat: 3713.7317
90 -  $0 \cdot 123 = 90$ , resultaat: 3713.73170
900 -  $7 \cdot 123 = 39$ , resultaat: 3713.731707
390 -  $3 \cdot 123 = 21$ , resultaat: 3713.7317073
210 -  $1 \cdot 123 = 87$ , resultaat: 3713.73170731
870 -  $7 \cdot 123 = 9$ , resultaat: 3713.731707317
90 -  $0 \cdot 123 = 90$ , resultaat: 3713.7317073170
456789 / 123 = 3713.7317073170
      rest 90 / 1230000000000

```

De repeterende rij 73170 achter de comma is in het algoritme ook direct te herkennen als de terugkerende restterm 90. Delen is niet zozeer een wiskundige bewerking, maar een proces, waar je minder en meer inhoudelijk mee om kan gaan.

De output van het programma geeft alleen het proces van staartdelen aan. De vraag is in hoeverre de meeste mensen dit proces begrijpen. Niet iets om de leerlingen te leren, maar wel om de essentie van het staartdelen, of het “happen”, voor ogen te houden. Hoe je dat proces opschrijft is minder belangrijk, maar lijkt tegenwoordig wel veel aandacht te krijgen. [Van der Craats, 2007] De leerling heeft een bepaal-

de kijk op delen, daar zou je bij aan moet sluiten. Verder is het goed om voor ogen te houden dat de methoden van delen geënt zijn op het decimale stelsel van getallen. Een priemfactor ontbinding, of een exponent-mantisse-vorm, van getallen verandert het inzicht in het proces van delen volledig.

In Amerika is het een tijd in zwang geweest om andere getallenstelsel te gebruiken om leerlingen meer inzicht te verschaffen in het rekenen. In computers wordt vaak gerekend met oct- en hex-stelsels: 2-vouden, 8-vouden en 16-vouden. Een aardig probleem kan zijn, om te vragen hoe lang het duurt voordat de grote en de kleine wijzer op een klok elkaar passeren. (11 keer per 12 uur: $1 \text{ uur}, 60 \cdot 1/11 = 5 \text{ minuten}, \text{ en } 27 \text{ seconden.}$)

Rekenen heeft veel meer aanknopingspunten met wiskunde dan een leerling op de lagere school kan bevroeden. Je hoeft maar een algebraboek open te slaan om je daar bewust van te worden. Maar op de middelbare school zou het een goede zaak zijn om algebra een centrale plaats te geven, zodat rekenen in context wordt geplaatst. Zo blijft de rekenvaardigheid een actief onderdeel van de lesstof. De leerling wordt gedwongen rekenen steeds weer te beschouwen van een hoger niveau.

6 Vroeger en nu

De inrichting van het schoolwezen is een afspiegeling van de samenleving. Bijna iedereen is betrokken bij het onderwijs, op een of andere manier. De loopbaan van de meeste Nederlanders wordt in grote mate bepaald door het genoten onderwijs en de onderwijservaring.

Het is daarom moeilijk om onderwijs te duiden. De brandbrief van studenten aan minister Van der Hoeven (“Lieve Maria”) is waarschijnlijk niet zozeer een teken dat het met het middelbare schoolonderwijs slecht gesteld is, die opmerking is van alle tijden, maar een teken dat tegenwoordig iedereen de schuld bij de ander legt, en zo aan zijn eigen verantwoordelijkheid ontkomt.

Het zou goed zijn als iedereen die wat wil zeggen over de stand van zaken in het onderwijs eens een boek leest van vroeger. Bijna alles is al gezegd, en

beter. Ook de problemen zijn niet anders. Er is eigenlijk niet zoveel nieuws in onderwijsland voor diegene die de geschiedenis een beetje kent. De belangrijkste trend is het verlies van waardering voor manuele beroepen en vaardigheden, van ambachtsschool, via de LTS, naar het alomtverguisde VMBO. Iedereen moet naar het VWO, of de HAVO. Althans, “*onze kinderen kunnen dat*”. Ook dit is een consequentie van de sociale democratie.

De mammoetwet van 1968 heeft het hoger onderwijs toegankelijk gemaakt. Het recht op onderwijs speelt een belangrijkere rol, dan het belang van onderwijs. De basisvoorwaarde van onderwijs is de toegankelijkheid van onderwijs. Als consequentie dient het onderwijs minder om de specifieke kwaliteiten van de verschillende kinderen verder te ontwikkelen en uit te buiten, maar als generieke molen tot volwassenheid. Het schooldiploma is het toegangsbewijs tot delen van de maatschappij. Kennis en individualisme spelen een ondersgeschikte rol in deze functie van het schoolwezen.

In de moderne samenleving is het moeilijk praten over de idealen van de wiskunde. Ik mag daarom graag boeken uit de jaren vijftig en zestig lezen, waarin ik deze idealen wel herken. De basisvoorwaarden voor onderwijs zijn diepgeworteld in onze cultuur. De grondwet zegt er zelf het nodige over. Niemand betwijfelt of bevraagt de leerplicht. In de multiculturele samenleving dient onderwijs er deels toe om jongeren los te weken van de cultuur van hun gemeenschap en ze te conformeren aan de gemene delers van de maatschappij. Deze Amerikaanse en Franse visies hoor je ook steeds vaker in Nederland. De, meer algemene, opvoedende taak ligt ook op menig tong. Dit zijn allemaal doelen die volgzzaamheid nastreven. Maar het ideaal dat onze kinderen het beter zullen hebben dan wij hoor je tegenwoordig niet vaak meer. De start die wij onze kinderen in het leven mee willen geven is een carrière start. Evenwicht en geluk volgen uit die economische voorwaarden. Ik denk dan alleen maar aan mensen die in hun te grote auto te hard van de ene belangrijke klant naar de andere belangrijke afspraak rijden.

Ik denk bij een evenwichtig persoon aan iemand vanuit zichzelf de motivatie tot deelname aan de maatschappij, de eigenwaarde als bescherming tegen

de inbreuk en geweld vanuit de samenleving, en het zelfstandige verstandelijke vermogen voor een werkbare sociale democratie op alle niveaus, heeft. Kortom onderwijs dient van mensen individuen te maken, niet een enkel, of een “top-individu”, maar allemaal individuen, die de anderen ook elk als individu beschouwen. En dat individu begint bij begrip en inzicht, om zelfstandig te kunnen oordelen, destijds de pilaren onder het wiskundeonderwijs. Als we allemaal hetzelfde weten, kunnen, en doen, dan zijn we geen individuen in het volste recht. Deze maand kwam de onderwijsminister nog met het verplichte canon van de vaderlandse geschiedenis. Een triest dieptepunt in de overheidsvisie op onderwijs. Hoe sta je zelfstandigheid toe in onderwijs? Dat is dezelfde vraag als hoe sta je creativiteit toe in onderwijs. Dat begint bij het niveau van de problemen waarmee je de leerlingen stelt, en eindigt met de eisen die je de leerling aan zichzelf laat stellen.

7 Modelleren

No gain without pain. Leren gaat niet vanzelf. Er bestaat niet zoiets als pijnloos en moeiteloos leren. Dit wordt vaak als excuus gebruikt voor het drillen van sommen, het opsommen van algebraïsche vaardigheden. De balans tussen drillen, en het ontwikkelde inzicht is vaak een subtiele en pragmatische. [Wansink, 1971] Maar ik moet altijd aan bergwandelen denken. Iemand die op de tredmolen zijn kilometers slijt heeft een hele andere insteek in het afzien, dan iemand die na een lange klim de top van een berg bereikt. Het uitzicht en het natuurlijke eindpunt zijn dan deel van de voldoening waarvoor zoveel moeite is gedaan.

Ook in het wiskundeonderwijs zullen leerlingen zulke toppen moeten kunnen tegenkomen. Stukjes onwrikbare kennis en inzicht, met moeite verworven. Modelleren is een manier om het leerproces als een klim met toppen te zien. De wandeling is de algemene probleemstelling. Ieder begint met zijn eigen redenen aan de klim, maar het is de taak van de docent om de leerlingen op het landschap, de route, en het doel te wijzen. Zodat de klim bewust beleefd wordt, en de top als top ervaren. De context dient ter versterking van de ervaring.

In het Sovjet-onderwijs lijkt er een grotere samenhang te bestaan tussen de onderwijspraktijk, leertheorie, en moderne wiskunde, getuige het grote aantal basislesboeken geschreven door gerenommeerde wiskundigen zoals Gel'fand en Shilov, [Aleksandrov et al., 1963] en de pragmatische constructivistische methoden in zwang. [Van Parreren and Carpay, 1972] Iedereen die wel eens met een Russische wetenschapper heeft samengewerkt weet kan daarin de resultaten van een onderwijsmethode herkennen die *hard maar eerlijk* is.

Het niet teleurstellen van leerlingen speelt in Nederland een grote rol. Dat neemt een deel van de uitdaging weg, zeker voor de betere leerlingen. Dit is ook een onderdeel van de sociale democratie. De lesstof is in dat opzicht onderhandelbaar. Kennis is discuteerbaar. In het licht van het verlicht positivisme, de basis van de moderne universiteit, [Idenburg, 1964] is deze visie op lesstof een vloek in de kerk.

Het kloof tussen de onwrikbare kennis en de onderhandelbare kennis, een consequentie van het sociaal constructivisme, is niet zo maar te dichten, maar wel te omzeilen. Als men de leerlingen zelf kun kennis met een kritisch oog kunnen laten beschouwen, leren ze met kennis de bijbehorende achterdocht en twijfel. Onderwijs in de geest van Socrates. De rol van de docent is daarin anders dan normaal. De meeste docenten op de middelbare school hebben wel iets van Socrates in zich. Ze zijn goed in staat de leerlingen met hun eigen argumenten in de val te lokken, maar dat is vaak op het sociaal en organisatorische vlak.

Modelleren, onderdeel van Wiskunde-D: Wiskunde in Wetenschap, levert een methode om leerlingen de zelfstandigheid en zelfwerkzaamheid te laten, desondanks een moeilijke problemen aan te bieden, en ze kritisch hun eigen bevindingen en leerproces te laten beschouwen. De insteek in onderwijs is anders. Het is probleemgericht onderwijs. Het proces is onderdeel van het onderwijs geworden. De verbalisering en de kritische beschouwing zijn niet langer de taak van de docent alleen, maar wordt door de probleemstelling gemeengoed. Reflectie en interpretatie, de communicatieve vorm van eigen maken van de lesstof, kunnen een plaats krijgen binnen de les. De vorm van de les valt samen met de functie van de les. De taal wordt wiskunde.

8 Probleemgericht onderwijs

Probleemgericht onderwijs is het onderzoek van een rijk, complex, en open-eind probleem. Wat is er bijvoorbeeld op tegen om VWO leerlingen enige maanden te laten stoeien met de stelling van Fermat? Zolang de docent maar verschillende stadia en resultaten herkent en erkent als mijlpalen in het leerproces. Proberen, schetsen, alternatieve formuleringen, bijzondere gevallen, enzovoort, zijn allemaal relevante leermomenten. Een ander probleem kan zijn: het vinden van π , ofwel de ratio van de omtrek en de diameter van een cirkel. Dergelijk elegante problemen hebben de wiskunde enorm verrijkt. Leerlingen ervaren daarmee het proces van wiskunde, in plaats van het resultaat van wiskunde. Het proces van de wiskunde is het doen van wiskunde, en het doen wordt in de leertheorie gezien als een goede manier om lesstof eigen te worden.

De docent heeft duidelijk een andere en meer gevarieerde rol dan in de traditionele les. Maar het is niet een gemakkelijke. Meer anticipatie verlangt meer kennis. Het onderscheid in het docentenmateriaal en het leerlingenmateriaal is belangrijk. Het docentenmateriaal is de anticipatie en variatie van eindniveaus en de lesstof in potentio.

Waarom heeft Socrates het Griekse denken zo bepaald? Plato was een rol als politicus voorgegeven, voordat hij Socrates ontmoette. Socrates heeft geen filosofie achtergelaten, in ieder geval geen consistente. De rol van Socrates is de rol van een docent. Socrates legde de omstanders problemen voor, geen antwoorden. De vraag blijft hoeverre hij zelf antwoorden had, maar dat doet niets aan hem af. In feite bevrijdde Socrates mensen van beslommeringen en de heersende meningen. Zijn leerlingen bereikten in korte tijd een niveau dat ver boven hun aanvangspositie lag.

9 Dankwoord

De afgelopen paar jaar ben ik via Nellie Verhoef en het instituut ELAN betrokken geweest bij wiskunde-onderwijs en wiskundedocenten. Nellie wist me met zachte hand in nieuwe richtingen te leiden. Ik heb dat erg gewaardeerd. In essentie heb ik altijd het leuke

van onderwijs en leren gevonden hoe ik het zelf beleeft: opgaan in de ontdekkingsstocht. Dat dat niet de heersende visie is op onderwijs heeft me regelmatig teleurgesteld. Nellie had dan altijd een opbeurend woord voor me.

Referenties

- M. Aigner and G. M. Ziegler. *Proofs from the book*. Springer, Berlin, third edition, 2003.
- A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, and M. A. Lavrentev. *Mathematics: its content, methods, and meaning*, volume I-III. MIT Press, Cambridge (Mass), 1963.
- N. L. Gage. Toward a cognitive theory of teaching. *Teachers College Records*, 65:408–412, 1964.
- Ph. J. Idenburg. *Schets van het Nederlandse schoolwezen*. Wolters, Groningen, 1964.
- J. D. Novak. *A theory of education*. Cornell University Press, Ithaca, 1977.
- J. Piaget. *Intelligence and affectivity*. Annual Reviews, Palo Alto, 1981.
- B. Russell. *On education*. Unwin Hyman, London, 1926.
- J. van der Craats. Waarom daan en sanne niet kunnen rekenen. *Nieuw Archief Wiskunde*, 5/8:132–136, 2007.
- P. M. van Hiele. *Begrip en inzicht*. Muusses, Purmerend, 1973.
- C. F. van Parreren and J. A. M. Carpay. *Sovjetpsychologen aan het woord*, volume 2 of *Leerpsychologie en onderwijs*. Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972.
- K. VanLehn. Problem solving and cognitive skill acquisition. In M. I. Posner, editor, *Foundations of cognitive science*, pages 527–579, Cambridge (Mass), 1989. MIT Press.

Joh. H. Wansink. *Didactische orientatie voor wiskundeleraars*, volume I-III. Wolters-Noordhoff, Groningen, 1971.

bijlagen

een artikel over schoolwiskunde

HOE GAAT DAT OOK AL WEER?

Het balletje over het niveau van de wiskundekennis en vaardigheid van leerlingen in het voortgezet onderwijs wordt eindeloos rondgespeeld tussen scholen, universiteiten, en het studiehuis. Als iemand die dagelijks het nut van wiskunde ondervindt, en nu met het voortgezet onderwijs geconfronteerd wordt, zowel direct als met de voorkennis van studenten op de universiteit, wil ik graag een andere duit in het zakje doen. Het wiskundelesprogramma is belabberd slecht, en dan gaat het niet over het niveau, maar over de lesstof zelf.

Mijn Hongaarse, wiskundige collega mag graag pochen over Hongarije, onder andere over dat ene gymnasium in Budapest dat, rond 1900, een rij wereldberoemde wetenschappers voortbracht zoals de nobelprijswinnaar Wigner en atoombom-Szilard, leerlingen van dezelfde wiskundeleraar. Het beroep van wiskundeleraar was nobel. In de eerste helft van de twintigste eeuw begonnen de Nederlanders Johannes de Groot en Arend Heijting, die op latere leeftijd wiskunde-professoren werden in Amsterdam, beide als leraar in het voortgezet onderwijs. Eerder ging hun Pieter Hendrik Schoute deze weg voor, in Groningen. Zoals voorheen de kans groot is dat de vader van een beroemde wetenschapper een predikant was, was met de invoering van het openbaar voortgezet onderwijs de kans groot dat deze vader een leraar was. Deze glorie-dagen van het voortgezet onderwijs als instituut voor voorbereidend wetenschappelijk onderwijs lijken voorgoed voorbij.

Persoonlijk, na vijftien jaren op tijdelijke arbeidscontracten natuurkundig en wiskundig onderzoek te hebben gedaan, besloot ik om mij te bekwamen als wiskundeleraar, op de lerarenopleiding aan de Universiteit Twente. De leerlingen waren ijverig genoeg, en op de leraren valt ook niet veel aan te merken. De

wiskundelesstof, daarintegen, is een gruwel. Met tegenzin doceerde ik de onsamenvangende onzin uit de wiskundeboekjes tijdens mijn stage. De wereld heeft er eeuwen over gedaan om het getal “nul” te accepteren, en dat de omtrek van een cirkel geen getal is dat zich laat opschrijven. Tegenwoordig wordt er met een grote boog gelopen om de problemen rond dergelijke concepten. Wat overblijft zijn wiskundige vaardigheden, die nog het meeste lijken op rekenmachine-recepten, die de leerlingen na een paar weken alweer vergeten zijn. “Hoe gaat dat ook al weer?”, klinkt het door de klas.

Op het moment hebben de Haagse vergaderers de mond vol van aansluiting van het wiskundeonderwijs bij wetenschap en techniek. De moderne wetenschap begon met de introductie van de infinitesimaalrekening van Newton, Leibniz, en onze Huygens. Met het werk van de Duitse wiskundige Weierstrass, rond 1900, bereikte het begrip van functies zijn hoogtepunt. Terugdenkend herken ik zijn sublieme concepten, zoals de open omgeving, uit mijn eigen schooltijd. Maar in de 21ste eeuw zijn we, op school, weer terug bij iets dat lijkt het eerste gestuntel met functies in de 17de eeuw, maar nu zonder het doel dat de oude meesters voor ogen stond.

In het voortgezet onderwijs heeft het aanleren van wiskundige vaardigheden eigenlijk weinig zin. Als studenten deze vaardigheden nog niet vergeten zijn moeten ze ze alsnog afleren, om ze te vervangen door krachtigere methoden, en meer strikte kennis, op de universiteit of hogeschool. In plaats daarvan is, bijvoorbeeld, het concept van bewijsvoering iets dat leerlingen hun hele leven zal bijblijven, en mogelijk uit kan groeien tot een kritische houding jegens argumentaties. Dat is nou juist geen onderdeel meer van het moderne wiskundeonderwijs.

Iets dat ik nauwelijks over mijn lippen kon krijgen, tijdens de les, was de onevenmachtswortel van een negatief getal. Leerlingen leren tegenwoordig dat de derdemachtswortel van -8 gelijk is aan -2. Voor de enkele reden dat dan $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$ “geinverted” kan worden, zijn er talloze redenen waarom dit een heilloze regel is die later alleen tot verwarring leidt. (Het volledige antwoord is dat $x^3 = x \cdot x \cdot x = -8$ drie complexe oplossingen heeft: $x = -2$, $x = 1 + i \cdot \sqrt{3}$, $x = 1 - i \cdot \sqrt{3}$.) Hadden de

makers van het onderwijsprogramma de reële rechte voor ogen gehad, zouden ze niet het onderscheid gemaakt hebben tussen $\frac{1}{3}$ en 0.33333333 wat een even wortel geeft. De lesstof is doorspekt met dergelijke distincties, een vloed van regeltjes die mij belachelijk voorkomt op het niveau van de lesstof. Er zijn wel distincties te maken, vele gebaseerd op fundamentele verschillen in aanpak van centrale begrippen in de wiskunde, maar die hebben niets te maken met het geneuzel in de wiskundeboekjes, bijvoorbeeld over de uitwerken van resultaten en afronden.

De hele wiskunde lesstof voor HAVO en VWO in ogenschouw genomen lijkt het wel of het hart eruit gesneden is en aan de randen nogal bizarre stukjes kennis worden toegevoegd. In voorstellen voor het nieuwe onderwijsprogramma komen onderwerpen voorbij zoals Voronoi diagrammen en de Fischer test, onderwerpen die niet in gerenommeerde wiskundehandboeken zoals van het Japans wiskundig genootschap voorkomen. Het is duidelijk dat hier commissieleden (van bijvoorbeeld het cTWO: Commissie vernieuwing wiskundeonderwijs) van hun stokpaardjes aan het berijden zijn, de fraaie verwaaide franje.

De totstandkoming van het onderwijsprogramma is een zaak van vergaderers geworden. De schoonheid, elegantie, en verwondering zijn uit het wiskundelesprogramma gehaald, waarschijnlijk omdat het onbemoembare en persoonlijke ervaringen zijn, waar geen beoordelingsschema, of prijskaartje, aangehangen kan worden. In de vergaderkamertjes is de waarheid de uitdrukking die vaak genoeg herhaald wordt. Dezelfde boodschap spreekt uit de lesstof. Gelukkig blijft de waarheid bewijsbaar in de wiskunde, en gaat diens schoonheid niet verloren. Alleen jammer dat tegenwoordig de leerlingen niet meer de mogelijkheid krijgen daar kennis van te nemen.

verbanden in de wiskunde

De logaritimesteeg

dwars door de schoolwiskunde

Er zijn in de wiskunde veel vragen die hetzelfde antwoord hebben. Dat is nu juist het mooie van wiskunde. Want als je elke keer een ander antwoord

moet geven dan wordt je wel erg moe, en wiskundigen houden van veel dingen, maar niet van moe worden. Vaak ontstaat mooie nieuwe wiskunde doordat twee totaal verschillende vragen hetzelfde antwoord blijken te hebben.

Waar wegen samenkomen

Dit artikel gaat om het antwoord op de volgende vragen:

- Wat is de inverse functie van e^x ?
- Wat is de integraal van $\frac{1}{x}$?
- Voor welke functie geldt $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$?

Het antwoord op al deze vragen is de *logaritme-functie* ofwel *logaritme*.¹ Op de middelbare school wordt de *logaritme* wel behandeld, maar naast een knopje **log** dat op de rekenmachine zit, worden er weinig verbanden gelegd naar andere aspecten van de wiskunde. Het zal voor de meeste leerlingen verrassend zijn dat je de formules op de formulekaart af kunt leiden, of zelf maar het idee dat die formules geen afspraak zijn, maar een resultaat.

Nu is juist de *logaritme* zo leuk, omdat het een dwarsstraat, of een steegje, is dat vele brede boulevards met elkaar verbindt in de wiskundestad. Het heeft een reeksontwikkeling waar makkelijk mee te rekenen is. Het speelt een centrale rol in complexe functies. En het is een van de simpelste integralen, waarvan het antwoord niet algebraïsch (met pen en papier) of meetkundig (met liniaal, passer, pen en papier) berekenbaar is.

De gereedschapskist van een leerling is nog niet zo vol. Het aantal wegen tot de oplossing zijn een paar straten op de overzichtskaart. De steegjes en de tunnels staan daar zeker nog niet op. De gereedschappen van de infinitesimaalrekening, integreren en differentiëren zijn goed bruikbaar. Ik zie vaak lange paden om mooie stukjes wiskundekennis te bereiken, maar in dit artikel wordt een dwarsstraat aangelegd op de huidige parallelle paden.

¹Dit wordt ook wel de natuurlijke *logaritme* genoemd, maar ik sluit mij aan bij de wiskunde-nomenclatuur waar de enige *logaritme* de natuurlijke is. Dat is de *logaritme* met grondtal $g = e$.

De *logaritme* is één van de meest mysterieuze functies uit de middelbare school wiskunde. Het heeft een aantal eigenschappen die op het eerste gezicht niets met elkaar te maken hebben. Maar bij nadere beschouwing blijkt er een netwerk aan onderlinge verbanden te bestaan. Wiskunde is die beschouwing. De vaardigheid met de gereedschappen komt met het bewandelen van de paden. Ik wil graag laten zien dat je in de wiskunde niet veel hoeft te weten, als je maar met je gereedschap om kan gaan.

De dwarsstraat als dwarsverbinding

Doordat er zoveel dwarsverbanden zijn in de wiskunde, heeft een wiskundige een gereedschapskist vol de meest uiteenlopende hulpmiddelen. Mijn gereedschapskist zit vooral vol met analytische gereedschappen. Dat komt door het vakgebied waar ik het meeste aan gewerkt heb: de oplossingen van partiële differentiaalvergelijkingen. Als ik tegen een nieuw probleem aanloop dan zit ik wel eens dagenlang te rommelen in mijn gereedschapskist voordat ik het beste apparaat te pakken heb.

Het leuke van wiskunde is niet het weten, maar het nog niet weten en toch doen. En iedereen doet het op zijn eigen manier. Dat is creativiteit. Maar zonder voldoende gereedschap wordt alles met dezelfde grote spijkers aan elkaar genageld. Zoals de timmerman daarvan gruwelt, gruwelt de wiskundige van regeltjes. Het grote receptenboek van de middelbare school bakent de problemen en de oplossingen af, en beperkt de wiskundige begrippen zodat er weinig dwarsverbanden overblijven. De enkele, brede weg naar de oplossing is een saaie weg, waar de leerling de hand van de docent niet loslaat, want leerlingen zijn net zo lui als wiskundigen, als het einddoel en de route gegeven zijn. Wie kan ze de schuld geven?

$$\text{Start bij : } \frac{1}{1-x}$$

De meeste studenten in de exacte wetenschappen zien nog steeds de *logaritme* als de inverse van de exponentiële functie. Maar dat is geen bruikbare definitie, want met de exponentiële functie kunnen leerlingen bijna net zo veel als met de *logaritme*: het knopje vinden, ofwel numerieke benaderen.

Deze wandeltocht begint bij $(1-x)^{-1}$. Dat kun je ook schrijven als een reeks:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \underbrace{x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots}_{x\text{-maal de reeks}}$$

en dezelfde reeks met x vermenigvuldigd geeft bijna dezelfde reeks:

$$\frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots$$

Het verband tussen de functie en een reeks kun je berekenen door een serie-ontwikkeling, of een Taylor-reeks, te maken, maar in dit geval kan het ook eenvoudiger. Nu volgt uit de volgende gelijkheden makkelijk dat de reeks en $(1-x)^{-1}$ hetzelfde zijn:

$$1 = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} = 1 + (x-x) + (x^2-x^2) + \dots = 1$$

Behalve de eerste term in de eerste reeks valt elke term weg tegen een andere. Dit heet ook wel een telescoopreeks.

Het rekenen met functies, zoals hierboven gebeurt, is rekenen met bijna alle getallen x . Het rekenen met de reeksen is ongeveer equivalent aan het rekenen met de functies, maar net niet helemaal. Voor $x = 1$ bestaat $(1-x)^{-1}$ niet, voor het gemak blijven we maar uit de buurt van $x = 1$. Misschien kunnen we daar later nog eens naar kijken, want vragen over $x = 1$ hebben weer allerlei nieuwe wiskunde opgeleverd. Borel stelde de vraag hoe voor getallen groter dan 1 ($x > 1$) er toch nog wat zinnigs over de reeks gezegd kan worden,² Von Neumann rekende met oneindige reeksen met een onbekende “ x ”, die van alles kon zijn.³

Het park der integralen

²Het verhaal gaat dat Borel eerst bij de grootste wiskundigen van de tijd, zoals Cauchy, aankwam met zijn ideeën over “divergente reeksen”, en dat deze hem boos de deur wezen.

³John von Neumann was een Hongaarse wiskundige die aan heel veel problemen als de eerste heeft gewerkt. In Berlijn werkte hij aan de wiskundige grondslagen van de quantummechanica. Als een deel van dat werk beschouwde hij oplossingen van vergelijkingen die, zogezegd, niet meer meetkundig op te lossen waren. Later werd dat de theorie van de onbegrensde lineaire operatoren.

Als je nu de integraal van $(1-x)^{-1}$ wil weten, dan zou je elke term in de reeks kunnen integreren:

$$\begin{aligned} \int_0^z \frac{1}{1-x} dx &= \int_0^z (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) dx \\ &= z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4 + \dots \end{aligned}$$

We weten nog niet wat deze reeks is, maar we noemen het de logaritme, ofwel de log-functie:

$$-\log(1-x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

Het minteken hebben we er maar bij gestopt, want eigenlijk willen we dat de afgeleide van de $\log(x)$ gelijk is aan x^{-1} , omdat dat een mooie definitie is van de logaritme:

$$\frac{d \log(z)}{dz} = \frac{1}{z}$$

en daarom:

$$\frac{d \log(1-x)}{dx} = \frac{1}{1-x} \frac{d(1-x)}{dx} = \frac{-1}{1-x}$$

Nu weten we gelijk dat $\log(1) = 0$, want elke term in de reeks is nul voor $x = 0$. Welke andere eigenschappen van de logaritme volgen uit deze definities die we nu al hebben? De logaritme van een breuk $\frac{1}{b}$ volgt uit de integraal door de substitutie van $z = \frac{1}{y}$:

$$\begin{aligned} \log(b) &= \int_{z=1}^{z=b} \frac{1}{z} dz = \int_{y=1}^{y=\frac{1}{b}} y d\left(\frac{1}{y}\right) \\ &= - \int_{y=1}^{y=\frac{1}{b}} \frac{1}{y} dy = -\log\left(\frac{1}{b}\right) \end{aligned}$$

Stel nu dat we voor $\log(a \cdot b)$ willen weten wat de functie is, dan kunnen we het invullen in de reeks, en na veel geploeter vinden we de eerste termen van de ontbonden reeks:

$$\begin{aligned} -\log((1-x)(1-y)) &= -\log(1 - (x+y-x \cdot y)) \\ &= (x+y-x \cdot y) + \frac{1}{2}(x+y-x \cdot y)^2 + \dots \\ &= x + \frac{1}{2}x^2 + y + \frac{1}{2}y^2 + \dots \end{aligned}$$

Het lijkt erop dat:

$$\log((1-x)(1-y)) = \log(1-x) + \log(1-y)$$

maar is dat ook makkelijker te bewijzen? Als we teruggaan naar de integraal is het direct duidelijk, door de substitutie $x = bz$:

$$\begin{aligned} \log(a \cdot b) &= \int_{x=1}^{x=a \cdot b} \frac{1}{x} dx = \int_{z=\frac{1}{b}}^{z=a} \frac{1}{bz} d(bz) \\ &= \int_{z=\frac{1}{b}}^{z=1} \frac{1}{z} dz + \int_{z=1}^{z=a} \frac{1}{z} dz = -\log\left(\frac{1}{b}\right) + \log(a) \\ &= \log(b) + \log(a) \end{aligned}$$

Waarbij we gebruik hebben gemaakt van wat we eerder geleerd hebben over $\log(\frac{1}{b})$. Dit is een erg handig resultaat, want nu weten we gelijk dat veel logaritmen makkelijker geschreven kunnen worden, bijvoorbeeld:

$$\log(a^n) = \underbrace{\log(a) + \log(a) + \dots + \log(a)}_{n\text{-keer}} = n \log(a)$$

Wandelen langs de logaritme-gracht

Voor een exponentiële groei, met een groeifactor a , geldt dus dat de logaritme van de groei het aantal tijdstappen keer de logaritme van de groeifactor is. Een verband tussen de logaritme en de exponentiële functie is te verwachten.

In vroegere dagen, gebruikte men een rekenliniaal in plaats van een rekenmachine. Op die liniaal stond ook een logaritmische schaal. Dat was handig voor het vermenigvuldigen van grote getallen. Want met behulp van $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ wordt vermenigvuldigen het optellen op de logaritmische schaal. Het probleem kon daarmee meetkundig worden opgelost.

De differentiaallaan

Een andere weg leidt tot een vergelijkbaar verband tussen exponentiële groei en de logaritme. De integraal kan ook anders geschreven worden, zoals we al zagen:

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}$$

Als we nu naar de grafiek kijken van x , en $y = \log(x)$, dan zouden we deze grafiek kunnen omkeren door x

en y om te wisselen. Wat gebeurt er dan met de afgeleide:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$$

ofwel, mits, $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{dx} = y$$

Dat is de differentiaalvergelijking voor de exponentiële functie. Een mogelijke definitie van een exponentiële functie is dat de afgeleide van de functie gelijk is aan de functie zelf. Als we nu twee keer x en y verwisselen in de grafiek krijgen we originele grafiek terug:

$$x = \log(\exp(x)) = \exp(\log(x))$$

De exponentiële functie $\exp(x)$ is de *inverse* functie van de logaritme.

Terugdenkend aan de reeks, hadden we al iets van de speciale aard van de logaritme kunnen zien? Dat kan zeker, kijk maar naar:

$$\frac{1}{x} = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x \cdot y = 1$$

De grafiek van x en y , is gelijk aan de grafiek waar x en y verwisseld zijn. Dat is toch een bijzondere eigenschap, die weer op allerlei manieren verband heeft met de logaritme en de exponentiële functie.

De wandelaar en de werkmans

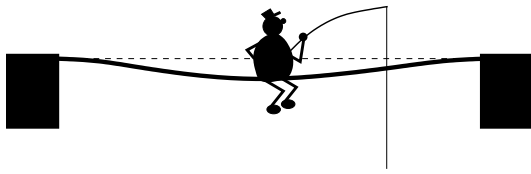
De schoonheid en de kracht

Nu hebben we bijna alle formules met logaritmen op de formulekaart zelf afgeleid. De formulekaart is dus overbodig. Die kan uit de gereedschapskist, als hij er al in had gezeten. Het is wel belangrijk dat integreren en differentiëren onderdeel zal van het parate gereedschap:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \Leftrightarrow F(x) = \int^x f(y) dy + C$$

en

$$\int_{y=a}^{y=b} f(y) dy(x) = \int_{y(x)=a}^{y(x)=b} f(y(x)) \frac{dy(x)}{dx} dx$$



Figuur 2: Dik Trom zit te zitten op een plank over de sloot. Kijk eens goed naar de buiging van de plank.

Een stukje kennis dat keer op keer zijn nut heeft bewezen.

Toen ik op school zat, zorgde de docent er in de eerste jaren voor dat deze stukjes kennis een vaste plaats kregen in mijn gereedschapskist. De *power-tools* waar geen leerling zich aan zal kunnen bezeren. Op elk niveau en in elke buurt zijn er mooie paadjes te ontdekken in de wiskunde, met de juiste gereedschappen. De lange paden leiden misschien wel langs de mooiste plekjes die iemand heeft gevonden, maar daarvan leer je niet zelf je weg vinden. Het evenwicht tussen verkennen en herkennen zorgt dat je niet verdwaalt.

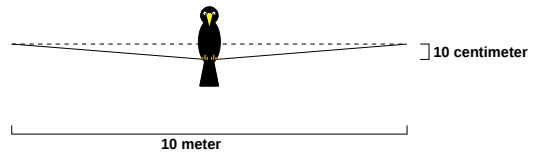
buiging als onderwerp in wiskunde-D

Dik Trom op de plank

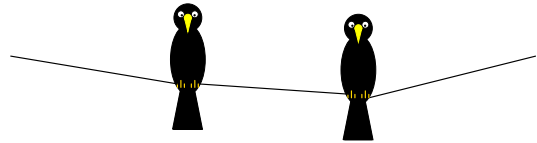
Buiging

Kijk naar figuur 2. Dik Trom zit te vissen op een plank over de sloot. Wij willen graag weten hoe de plank doorbuigt onder het gewicht van Dik Trom. De plank knikt niet door, maar buigt. Hij zit ook goed vast aan de kanten zodat de plank niet van de wal schuift.

- Hoe beschrijf je de buiging in de wiskunde?
- Als Dik Trom twee keer zo zwaar was, zou de plank twee keer zo ver doorbuigen. Wat verandert er aan die beschrijving?
- Wat verwacht je dat de helling, of de richtingscoëfficiënt, of de afgeleide doet?
- Schets de richtingscoëfficiënt.



Figuur 3: Een vogel zit op de waslijn, daardoor zat de lijn door, van de stippellijn naar een soort driehoek.



Figuur 4: Welke van de twee vogels is het zwaarst? Waarom?

Vogels op de waslijn

Om de buiging goed te begrijpen kijken we eerst naar een gemakkelijker probleem. Als vogels op een waslijn gaan zitten zakt de waslijn ook door. De waslijn buigt niet maar knikt eigenlijk. Kijk naar figuur 3. Wat is het verschil met de plank? Geef de wiskundige beschrijving van deze waslijn, waarbij x in meters is.

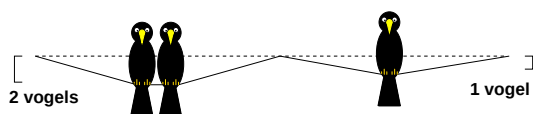
De waslijn bestaat uit rechte lijnstukken tussen de plekken waar die vastzit en waar de vogels zitten. Het is nu een stuk gemakkelijker om een schets te maken van de richtingscoëfficiënt. Hoe ziet die eruit? Wat gebeurt er op de plek waar de vogel zit?

Waarom is het oppervlakte van beide blokken gelijk?

Als er twee vogels op de lijn zitten dan kun je eigenlijk al vermoeden welke vogel het zwaarst is? Welke vogel is er het zwaarst in figuur 4, en welke in figuur 5?



Figuur 5: Welke van de twee vogels is het zwaarst? Waarom?



Figuur 6: Als twee vogels op de waslijn zitten hangt deze twee keer zover door.

Nu heeft Julia goed opgelet en ontdekt dat als er even zware vogel naast een andere gaat zitten dan zakt de waslijn twee keer zoveel door. Zie figuur 6. August concludeert het gewicht van de vogel evenredig is met de sprong in de richtingscoëfficiënt. Laat dat zien.

De plank

Nu is de vraag of er voor de plank er een vergelijkbare beschrijving is. De plank knikt niet, er zit geen sprong in de richtingscoëfficiënt. Zit er een sprong in de richtingscoëfficiënt van de richtingscoëfficiënt, ofwel de tweede afgeleide? Waarom wel, of waarom niet? Maak een schets van die functie.

Als de plank nu twee meter lang is, en het midden is 0, dan loopt de plank van -1 meter tot +1 meter. De simpelste manier om de tweede afgeleide $y''(x)$ te beschrijven of benaderen is met behulp van stukjes polynoom:

$$y''(x) = \begin{cases} x * (1 + x) & -1 < x < 0 \\ x * (1 - x) & 0 < x < 1 \end{cases}$$

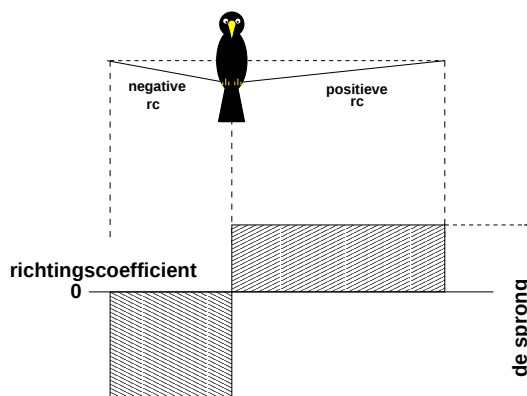
Klopt dit met de schets die je gemaakt hebt? Schets de derde afgeleide $y'''(x)$. Wat is de sprong in de derde afgeleide $y'''(x)$ in $x = 0$? Wat is de doorbuiging $y(x)$ in dit geval?

Is voor de plank de sprong weer evenredig met het gewicht? Ofwel buigt de plank twee keer zo ver door als het gewicht twee keer zo groot is?

De kracht

De knik in de waslijn en de sprong in de derde afgeleide van de plank zijn benaderingen van de werkelijkheid. De vogel en Dik Trom zitten niet op een enkel punt, zoals $x = 0$, maar op een stukje, bijvoorbeeld $x \in [-0.20, 0.20]$. Hoe breed is het achterwerk van Dik Trom? Hoe denkt je dat de richtingscoëfficiënt, in het geval van de waslijn, en de derde afgeleide, in het geval van de plank er dan uitzien?

Hoe zien de afgeleiden van beide functies eruit?



Figuur 7: De richtingscoëfficiënt, het oppervlakte van de twee blokken is gelijk. Waarom?

De laatste twee functies zijn de kracht, of druk, functies. Hangt het oppervlakte onder deze grafieken af van hoe breed Dik Trom en de vogel zitten, en of ze recht of scheef zitten? Alleen op de plek van de vogel en van Dik Trom zijn de kracht ongelijk aan nul. Laat dat zien voor de plank.

Voor de waslijn zeggen we dat:

$$y''(x) = \text{kracht}(x)$$

En voor de plank zeggen we dat:

$$y'''(x) = \text{kracht}(x)$$

Het gewicht is de oppervlakte van de kracht:

$$\text{gewicht} = \int \text{kracht}(x) dx$$

Dit zijn de differentiaalvergelijkingen van een stationaire, stilstaande, *snaar* en van een stationaire *balk*.

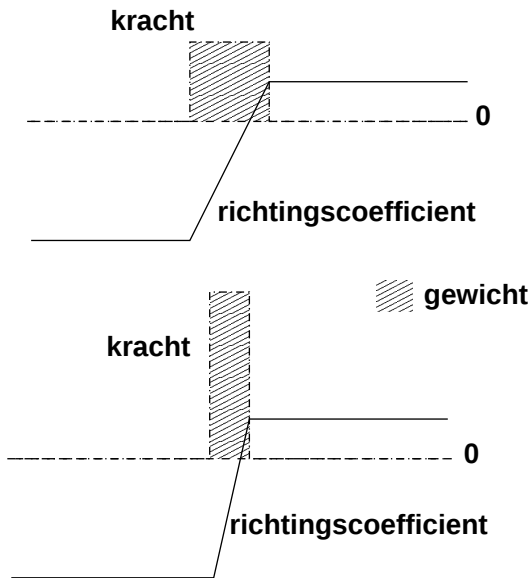
Kunnen we met deze differentiaalvergelijkingen alles oplossen?

docentenhandleiding over buiging

Dik Trom op de plank

docentenhandleiding

Differentiaalvergelijkingen worden spelenderwijs ingevoerd. De twee differentiaalvergelijkingen waar



Figuur 8: De afgeleide hangt af van de overgang tussen de negatieve richtingscoefficient en de positieve. Maar waarom is het oppervlakte altijd gelijk?

het om gaat zijn de snaarvergelijking:

$$y''(x) = F(x)$$

en de Euler-Bernoulli balkvergelijking:

$$y'''(x) = F(x)$$

Op de stukken waar de kracht $F(x) = 0$ geldt:

$$y''(x) = 0 \Rightarrow y(x) = a + bx$$

en

$$y'''(x) = 0 \Rightarrow y(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Waar de kracht F constant is:

$$y''(x) = F \Rightarrow y(x) = a + bx + \frac{F}{2}x^2$$

en

$$y'''(x) = 0 \Rightarrow y(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \frac{F}{24}x^4$$

De bedoeling is dat naast $y(x)$ ook naar $y'(x)$, en $y''(x)$ etc. gekeken wordt. Daardoor moeten de leerlingen een gevoel krijgen voor de differentiaalvergelijkingen.

De randwaarden spelen een belangrijke rol, maar worden niet bij name genoemd. Het is de bedoeling dat de leerlingen zelf tot de conclusie komen dat randwaarden $y(x) = 0$ (snaar) en $y(x) = y'(x) = 0$ (plank) voor x zijn de eindpunten, in de wiskundige beschrijving een rol spelen. Ten eerste komt dat naar voren bij de relatie tussen de richtingscoefficient en de afstand tussen vogel en eind. Daarna zullen ze er zeker tegenaan lopen als je uit de formule voor $y''(x)$ de uitwijking $y(x)$ proberen te reconstrueren.

Een ander concept waar ze tegenaan zullen lopen is lineariteit. Als de sprong twee keer zo groot moet zijn $F \rightarrow 2F$, dan is de uitwijking ook twee keer zo groot $y(x) \rightarrow 2y(x)$, maar ook $y''(x) \rightarrow 2y''(x)$.

Tegenwoordig wordt het geval van de knik, en de sprong, opgelost met behulp van de delta functie:

$$\forall \phi(x) : \quad \phi(x_0) = \int \phi(x) \delta(x - x_0) dx$$

Zodat de kracht wordt: $F(x) = F\delta(x - x_0)$ waar x_0 de plek is waar de vogel en Dik Trom zitten. Indirect hebben ze met dit resultaat te maken, omdat de sprong, in termen van de kracht alleen met het oppervlak van de integraal te maken heeft.

Waarom de Euler-Bernoulli balk beschreven wordt door de vierde orde differentiaalvergelijking:

$$y''''(x) = F(x) \text{ en niet : } y'''(x) = F(x) \text{ (fout dus!)}$$

is, op zich, lastig. Het gemakkelijkste is om in te zien dat als $F(x)$ een even functie is, dat $y(x)$ dat ook moet zijn. In het geval van $y'''(x) = F(x)$ is dat niet het geval.

De oplossing van de balk is:

$$y(x) = \begin{cases} -1 + 3x^2 + 2x^3 & -1 < x < 0 \\ -1 + 3x^2 - 2x^3 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

De sprong in de derde afgeleide is daardoor 36.

notitie over dynamische modellen

Dynamische modellen en voorspellen

Samenvatting

Onder *dynamische modellen* vallen verschillende aspecten van de wiskunde. Differentiaalvergelijkingen lopen het meest in het oog. Het geheel kan ontrafeld worden in samenhangende concepten, die apart geïntroduceerd kunnen worden. In dit artikel wordt de methode van de mechanica geleend die onderscheid maakt tussen *statica*, *kinematica*, en *dynamica*. Vrij vertaald naar de wiskunde in: het beschouwen van het object, de voorwaarden voor beweging, en de beweging zelf.

Tijd voor tijd

Tijd en beweging zijn onafscheidelijk met elkaar verbonden. Ons begrip van tijd zit in de beweging van de dingen zoals de draaiing van de aarde dat ons dagritme bepaalt, en het kloppen van het hart dat ons levensritme slaat. Dynamische modellen zijn een wiskundig kader om het concept *tijd* nader te kunnen analyseren.

De wetenschap van tijd is de wetenschap van voorspellen. Een wetenschapper heeft een goed begrip, en een goed model, van een experiment als hij of zij de uitkomst van een experiment van te voren kan voorspellen. Drie ingrediënten gaan in een voorspelling: de juiste variabelen. De kleur van een object zal niet zo vaak de uitkomst van een experiment bepalen, de massa wel. Ten tweede, de juiste beginwaarden bepalen de uitkomst. Waar een gegooide bal op de grond valt hangt af van de massa, maar ook de plaats en snelheid tijdens het begin van het experiment. Als laatste moet er een model zijn voor de dynamica, de ontwikkeling of evolutie, in de tijd.

In het geval van een biljartbal is de evolutie eenvoudig, de snelheid bepaalt hoeveel de bal verder rolt in een gegeven tijd. Ook een slinger gedraagt zich op een vaste eenduidige manier, die we eenvoudig in een formule van een functie voor de hoek als functie van de tijd kunnen vatten.

Maar hedentendage zijn wiskundigen dynamische modellen gaan zien als de modellen waar er geen for-

mule gegeven kan worden als functie van de tijd. Het gedrag is niet langer te voorspellen in een strikte wiskundige zin, zoals met analyse. Dit was een crisis in de wetenschap rond 1900. De vragen die men stelde veranderden: Is een beweging stabiel? Wat is stabiel? Wat gebeurt er als de beginwaarden een klein beetje veranderen? Komt het model weer op hetzelfde punt uit? Is de beweging periodiek, treedt er herhaling op? Dit zijn allemaal interessante vragen, die, jammer genoeg nietszeggend zijn zonder een goed inzicht in het model, de beginwaarden, en het model voor de dynamica.

De crisis was aangezwengeld door twee problemen die simpel leken maar toch geen oplossing in gesloten vorm, een functie van tijd, hadden. Het eerste was het probleem van de beweging van zon, aarde, en maan. Het tweede was de draaibeweging van een object in de ruimte, of een vrije val. Beide hebben wel een oplossing gekregen, maar de toon was gezet. Wat kunnen we nog zeggen over complexe dynamische modellen?

Om deze drie onderdelen, van dynamische modellen, een plek te geven en er in de klas afzonderlijk mee aan de slag te kunnen gaan hang ik ze aan de drie aspecten van mechanica: statica, kinematica, en dynamica. Dit is niet altijd de traditionele manier om tegen dynamische modellen of zelfs mechanica aan te kijken maar heeft zeker zijn waarde bewezen in het (universitair) onderwijs van mechanica.

Statica, kijken

Statica is de wetenschap van dingen in evenwicht, maar kan ook een goede aanleiding zijn om goed naar dingen te kijken. Ik neem het probleem van een de statische elastische balk omdat het een visuele introductie is in differentiaalvergelijkingen. De differentiaalvergelijking van de uitwijking $y(x)$ van een balk is gegeven door:

$$y''''(x) = F(x)$$

waarbij $F(x)$ de kracht, bijvoorbeeld een zak zand, midden op de balk. Voor het gemak nemen we een balk tussen $x = 0$ en $x = 1$. Deze vergelijking is lineair: als de kracht $F(x)$ twee keer zo groot wordt, dan wordt de uitwijking $y(x)$ dat ook. Dit is een

benadering, maar wel zo succesvol dat hij al 260 jaar gebruikt wordt.

Natuurkundigen zullen nog allerlei constanten in de formule stoppen, die wiskundigen niet interessant vinden. Dit is misschien wel het grootste strijdpunt tussen natuurkunde en wiskunde onderwijs.

Als de kracht constant is op de plek waar de zak ligt, dan is $F(x)$ een discontinue functie:

$$F(x) = \begin{cases} 3P & \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

waarbij P de druk is. De kracht $F(x)$ is een discontinue functie. Wat weten we dan al van $y(x)$? Als je de balk omdraait $x \rightarrow 1 - x$ moet je weer dezelfde waarde krijgen dus is de balk symmetrisch rond $x = \frac{1}{2}$. Dat wil zeggen $y(x) = y(1 - x)$. Omdat de balk aan beide kanten vast zit is $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y(1) = 0$, en $y'(1) = 0$ aan beide einden $x = 0$ en $x = 1$. Dit zijn de randwaarden.

De uitwijking $y(x)$ is een gladde, continue functie. De differentiaalvergelijking vertelt ons dat $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$, en $y'''(x)$ allemaal continu zijn, en $y''''(x) = F(x)$. En omdat $F(x)$ deelgewijs constante functie is (0 of P), is $y(x)$ deelgewijs een polynoom:

$$y(x) = \begin{cases} -ax^2 - bx^3 & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ -c + d(\frac{1}{2} - x)^2 + \frac{3P}{24}(\frac{1}{2} - x)^4 & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ a(1 - x)^2 + b(1 - x)^3 & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

En zo blijven er vier constanten over, a , b , c , en d die bepaald moeten worden zodat de balk netjes glad is in $x = \frac{1}{3}$ en $x = \frac{2}{3}$. Dit zijn precies de vier continue functies $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$, en $y'''(x)$. Vroeger sprak met over de linker en de rechter afgeleide in het punt.

Dit is kort door de bocht een sommetje waar op verschillende manieren naar gekeken worden en waarbij vele belangrijke aspecten van differentiaalvergelijkingen aan de orde komen. Hier kan men weken les over geven, waarbij zowel de probleemstelling als de oplossingsmethode gevarieerd kan worden om inzicht te geven in de onderliggende concepten die los staan van de typische vaardigheden geassocieerd met een enkele, van de vele, oplossingsmethoden.

Gladheid en differentieerbaarheid van een $y(x)$ zijn cruciale eigenschappen die netjes gedefinieerd dienen te worden. Maar de leerlingen moeten zich daar een

voorstelling van kunnen maken. Hetzelfde resultaat kan op vele andere manieren ook verkregen worden. Bijvoorbeeld met de schietmethode. De differentiaalvergelijking kan geïntegreerd worden:

$$y(x) = \int^x \left(\int^t \left(\int^s \left(\int^p F(r) dr \right) dp \right) ds \right) dt$$

De vier integratie constanten moeten zo gekozen worden dat aan de randwaarden $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y(1) = 0$, en $y'(1) = 0$ voldaan wordt.

Kinematica, variabelen

Dynamica kan bevredigend zijn voor een wiskundige, maar het is onbevredigend voor een wetenschapper die zich het doel heeft gesteld om de wereld te beschrijven. Het is in feite een gebrek aan kennis. De twee grote problemen van 1900 zijn alsnog opgelost, ze kregen een oplossingsfunctie, zodat de toekomst te voorspellen was. Cruciaal voor een oplossing is het herkennen van de juiste variabelen. Aan de hand van een foto van een biljarttafel op een bepaald moment valt er niet te voorspellen hoe de ballen iets later liggen. Maar twee foto's, kort naar elkaar, stelt ons in staat de snelheid van alle ballen te bepalen, en te extrapoleren naar een later tijdstip. Dus twee maal alle posities, of alle posities en alle snelheden samen stelt ons, in principe, in staat de toekomst van de ballen te bepalen.

Misschien klinkt dit eenvoudig, maar het vinden van de variabelen die de toekomst, uniek en eenvoudig vastleggen, is in het algemeen niet zo eenvoudig. Dit heet ook wel het Cauchy probleem. Vaak kijken we terug naar het biljart of een vergelijkbare situatie. Maar wat belangrijk is om te realiseren dat de keuze van de variabelen van het model afhangt. Water dat uit een bak loopt zal over het algemeen alleen afhangen van de initieele waterhoogte in de bak. Maar als het water klotst in de bak dat is niet alleen de hoogte maar ook de snelheid van belang.

Biljartballen, het paradigma van de kinematica, hebben ook een link met meetkunde. De twee principes van klassieke kinematica zijn het impulsbehoud en het energiebehoud. In de wiskunde is dat de vectorrelatie van een driehoek, en de norm van vectoren.

Als voor drie vectoren geldt dat de eerste $\mathbf{v}_1$ de som van de tweede $\mathbf{v}_2$ en de derde $\mathbf{v}_3$ is, dan vormen ze samen een driehoek, als de derde vector begint bij het einde van de tweede:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$$

Dit is de relatie van behoud van impuls als je een biljartbal met snelheid $\mathbf{v}_1$ op een stilstaande laat botsen. De eerste bal krijgt nieuwe snelheid $\mathbf{v}_2$ en de tweede bal gaat met snelheid $\mathbf{v}_3$ bewegen.

Behoud van energie is het behoud van norm:

$$\mathbf{v}_1^2 = \mathbf{v}_2^2 + \mathbf{v}_3^2$$

De twee relaties bij elkaar zorgt ervoor dat de twee ballen een rechte hoek maken. Dit is een toepassing van de stelling van Thales. In vectormeetkunde betekent dat:

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = 0$$

Dit is een simpel sommetje dat ook bij natuurkunde gedaan wordt, maar niet altijd even elegant. Maar hier houden de vragen niet op. Als er bij de botsing energie verloren gaat wat gebeurt er dan met de hoek. En wat is de maximale energie die verloren kan gaan?

$$\mathbf{v}_1^2 > \mathbf{v}_2^2 + \mathbf{v}_3^2 \geq E_{\text{minimaal}}$$

In termen van meetkunde, een echt wiskundevak, kunnen deze vragen uitgetild worden boven het stugge, vul-maar-in, rekenwerk. Elegante wiskunde is vaak ook krachtige wiskunde.

Dynamica, algemene vragen

De energie is een voorbeeld van een algemene eigenschap. Een grote zwerm moleculen bepalen de eigenschappen van het gas waar ze deel van zijn. De kinetische gastheorie beschouwt de moleculen als biljartballen, en kan zo, met behulp van kansrekening, de empirische gaswetten afleiden, zonder precieze details over afzonderlijke moleculen, zoals hun plaats en snelheid te weten. Een groot succes in de negentiende-eeuwse thermodynamica. Maar dit is niet een typisch voorbeeldje waarmee je een leerling aan het werk zet.

Er zijn twee soorten problemen in de dynamica waar men leerlingen mee aan het werk wil laten gaan.

De eerste is een collectie van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen waar de wiskundigen zelf ook geen generieke methoden voor hebben, maar wel in de loop van de tijd veel eigenschappen en technieken voor zijn ontwikkeld. Omdat deze technieken nogal gecompliceerd kunnen zijn, ook omdat niet-lineariteit zelf al lastig is, worden de problemen uitgekleeft tot een aanvaardbaar niveau voor leerlingen. Het moge duidelijk zijn dat de schrijver van dergelijk opgaven minder gecharmeerd is.

Iedereen die niet het beschrijven van dynamica, maar het voorspellen de toekomst, tot taak heeft gesteld, zal proberen het dynamisch model zodanig aan te passen dat het oplosbaar is. Lineariteit is daarbij een belangrijke eigenschap.

Twee docenten in de kerngroep Wiskunde-D aan de UT, Art Groen en Joke Zwarteveen, zijn bezig met de ontwikkeling met een lesmodule over de stadion *wave*. De wave is een golf van mensen die opstaan, hun handen in de lucht steken, en weer gaan zitten, zodat het lijkt alsof er een golf rondloopt in het stadion. Hiervan kunnen leerlingen zich een goede voorstelling maken. Leerlingen kunnen daardoor zelfstandig aan de slag vanaf het eerste moment. Er kan een discussie ontstaan waarin leerlingen met vragen en antwoorden komen.

Het leuke van de stadion wave is dat er een oud principe van Huygens aan te grondslag ligt dat sinds de jaren vijftig van de vorige eeuw weer is opgepoetst. Golven worden gezien als een collectief geheel. De golflengte is ruimtelijk uitgebreid. Maar we accepteren tegenwoordig ook dat er geen interactie is over afstand. Elk molecuul stoot alleen zijn naaste burens aan. De collectieve gedrag ontstaat door het gedrag van een enkel molecuul, en het gedrag tussen twee of drie burens. Met behulp van de kennis van beide kan het collectieve gedrag, zoals golflengte en golfsnelheid voorspeld worden.

De vallende dominostenen is een vergelijkbaar voorbeeld. Een golf lijkt zich voort te planten, maar de stenen blijven op hun plaats. De golfsnelheid is een combinatie van de valsnelheid van een enkele dominosteen, en de impulsoverdracht in de botsing tussen twee opvolgende stenen.

Wat geven we mee?

In 1971 kwam min of meer de laatste serie Nederlandse leerboeken natuurkunde tot stand voor het universitair onderwijs. Het was een vertaling en aanpassing, een samenwerking van verschillende universiteiten, van de boeken van Marcelo Alonso en Edward Finn voor de Nederlandse situatie. Het boek over mechanica werd, en wordt, op veel universiteiten gebruikt. Het onderscheid tussen statica, kinematica, en dynamica wordt ook in dat boek gemaakt. Een dergelijk project lijkt, jammer genoeg, niet meer in de moderne tijd te passen. Vijftig jaar eerder schreven de professoren zelf samen nog een *leerboek der natuurkunde*. Wiskundigen zijn nog meer eenlingen.

Een keur aan commissies en groepen draagt tegenwoordig bij aan het onderwijsprogramma, wat naar buiten uitgebouwd wordt, maar een hart lijkt te ontbreken. Een discussie over de grondslagen van de wiskunde, en de samenhang tussen de onderdelen, sterkt niet alleen de opbouw van het onderwijsprogramma, maar geeft ook de docent een kader om de lesstof in aan te bieden.

Sommigen zullen zich de verzamelingenleer herinneren, die in de jaren zeventig tot kern werd verheven. Dat was een afspiegeling van de grondslagendiscussie in de wiskunde van vijftig jaar eerder. Verzamelingenleer was te dogmatisch en niet pragmatisch genoeg om alle schoolwiskunde te kunnen onderbouwen op een relevante manier.

Dynamica is een excuus om over continuïteit te praten. Verder is het een goede aanleiding om het concept tijd in het wiskundeonderwijs te brengen. Voor diegene die dit allemaal te filosofisch klinkt, wil ik alleen meegeven dat de docent die zelf geen samenhang in de stof ziet, de leerlingen alleen een zak vaardigheden meegeeft met beperkte houdbaarheid.

- M. Alonso en E.J. Finn, *Mechanica*, 1971, Agon Elsevier.
- D. van Dalen, *Filosofische grondslagen van de wiskunde*, 1978, Gorcum.
- I. Stewart en D. Tall, *The foundations of mathematics*, 1977, Oxford.

- Dubbel, *Handbook of mechanical engineering*, 1994, Springer.
- R.S. MacKay en J.D. Meiss, *Hamiltonian dynamical systems: a reprint selection*, 1987, Adam-Hilger.
- V.I. Arnold, *Ordinary differential equations*, 1973, MIT.

voorstel Wiskunde D (6-7-2006)

De onderwerpen moeten in principe al aan te pakken zijn met standaard curriculum wiskunde, en niet gelijk een nieuwe vaardigheden vereisen (zoals Fouriertheorie of differentiaalvergelijkingen). De nieuwe vaardigheden kunnen later ingevoerd worden met de (optionele) verdiepingsvragen. (Eerst het probleem, dan de methode.)

Veel onderwerpen die te maken hebben met vloeistofdynamica (tsunami's, bellen, etc.) zijn wel goed voor een "ah"-en-"woh"-college, maar niet om leerlingen aan de slag te krijgen, zonder het onderwerp te debiliseren, iets waar leerlingen (die wiskunde D kiezen) wel gevoelig voor zijn. Een vraag van een leerling die beantwoord moet worden met: "De werkelijkheid is veel ingewikkelder" is garant om leerlingen hun interesse te doen verliezen.

Veel mathematische fysica heeft met golven te maken, een onderwerp dat gelijk al afvalt omdat de leerlingen zullen blijven steken in de Fouriertheorie. Hetzelfde geldt voor differentiaalvergelijkingen, die centraal staan in bijna alle mathematische fysica.

Het onderwerp moet ook voldoende breedte zonder diepte hebben, zodat leerlingen wat te kiezen hebben, en ook zelf met nieuwe vragen kunnen komen, zodat ze niet het gevoel hebben een lesje af te zitten draaien.

De leerlingen moeten zelf aan de slag kunnen gaan met een probleemstelling. Dat vraagt ten eerste dat ze de probleemstelling kunnen bevatten en die niet volledig buiten hun ervaringswereld valt, en dat de oplossing benaderbaar is: met deelproblemen en deel- en benaderingsoplossingen.

Een aantal mogelijke onderwerpen:

- Data clustering en kansberekening: met eurovisie songfestival, genetica, kijkcijfers. Wiskundige termen: correlaties, Praktische voorbeelden: vriendenclubjes, Erdos/Weinberggetal, luie stemmers.
- Error correcting code: signalen transfer, getallenstelsels. Wiskundige termen: priemgetallen, klassen, confusie graaf, afstand. Praktische voorbeelden: lange staartdelingen, morse, IBAN nummer.
- Prey-predator cycles: bacteria groei, stabiliteit. Wiskundige termen: discrete evolutie, fixed point, periode. Praktische voorbeelden: roofdieren, markteconomie, douchetemperatuur, chaos.
- Geometrische optica/acoustiek: resonanties, vervormingen. Wiskundige termen: minimale afstand, reflectie, afbeelding. Praktische voorbeelden: lampspiegel, refractie, radarreflector, lenzen.
- Exacte/geometrische elastica: buiging, kromming. Wiskundige termen: kromtestraal, oppervlakte kromming, lengte, oppervlakte. Praktische voorbeelden: veren, ballen, tentdoek, robots.
- Wiskundig modelleren: Dimensionele analyse, invarianten (getallen), schalen. Wiskundige termen: (MKS stelsel), exponenten, quantitative analyse.

Het moge duidelijk zijn dat Wiskunde-D een wat andere invulling heeft gekregen in de kerngroep Wiskunde-D aan de Universiteit Twente, dan wat mij eerst voor ogen stond. Het is, onder andere, toch mogelijk gebleken om over golven te praten zonder Fouriertheorie.

In de geometrische optica kan een probleemstelling zijn om de refractiewet van Snellius af te leiden, op grond van een lichtstraal die de kortste weg neemt. Daarnaast kunnen leerlingen zelf de werking van een radarreflector testen door de pad van het radarsignaal te tekenen. Met moeite kunnen ze misschien zelf de parabolische spiegel van een ideale voorwaarts schijnende lamp reconstrueren.

Mijn persoonlijke mening is dat computerprogramma's vooral het saaie gedeelte van het "werk" uit handen moeten nemen. Ik stel voor om vooral met commandline (MS-dos prompt) programma's te werken met tekst-in-tekst-uit.